Nonlinear Grassmann Sigma Model in Any Dimension and An Infinite Number of Conserved Currents (1)

数理解析研究所講究録
1070巻 1998年 176-183

Nonlinear Grassmann Sigma Model in Any Dimension and An Infinite Number of Conserved Currents その1

早稲田大学理工学研究科　鈴木 達夫 (Tatsuo Suzuki) *

概要

Nonlinear sigma model の運動方程式に，ある条件を付加することで，無限個の保存カレントを持つ model が構成できる．それを元の model の submodel と呼ぶ．我々は Nonlinear Grassmann sigma model の submodel を定義し，その無限個の保存カレントを具体的に求める研究を行った．この研究は，藤井一幸氏，本間泰史氏との共同のものであるので [1], [2]，我々の研究の理論構成は本間泰史氏の（その2）に譲り，本稿ではまず，我々の研究のきっかけとなった O.Alvarez, L.A.Ferreira and J.S.Guillen(AFG) の method の説明をし，その1つの適用例である (1+2) 次元 CP^1-model と (1+2) 次元 CP^1-submodel について述べる．それに関連して，$(1+m)$ 次元 CP^1-submodel の保存カレントについて，その後の我々の研究からわかったことについても触れる．

1 (AFG) の method

O.Alvarez, L.A.Ferreira and J.S.Guillen(AFG) は [3] において，高次元可積分系への新しいアプローチを試みた．ここでは，そこに述べられている AFG の method を，必要最小限に絞って説明することにする．

$M = M^{1+2}$ を (1+2) 次元 Minkowski 空間，$\hat{\mathfrak{g}}$ を Lie algebra とする．M 上 $\hat{\mathfrak{g}}$ に値を持つ connection form A_μ と $\hat{\mathfrak{g}}$ に値を持つ anti-symmetric tensor $B_{\mu\nu}$ を考える．これらに対し，その曲率と，A_μ に関する共変微分を定義しておく．

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \tag{1.1}$$

* *E-mail address*: 695m5050@mn.waseda.ac.jp

$$D_\mu \tilde{B}^\mu \equiv \partial_\mu \tilde{B}^\mu + [A_\mu, \tilde{B}^\mu], \tag{1.2}$$

ここで,

$$\tilde{B}^\mu \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\lambda}B_{\nu\lambda}, \quad \epsilon^{012} = 1 = -\epsilon_{012}. \tag{1.3}$$

まず次の仮定をおく;

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{p}, \tag{1.4}$$

ここで $\mathfrak{g}$ は semisimple Lie subalgebra, $\mathfrak{p}$ は $\hat{\mathfrak{g}}$ の abelian ideal とする. [3] に従って, local integrability condition を定義する.

定義 1.1 (local integrability condition(LIC))

$$A_\mu \in \mathfrak{g}, \quad B_{\mu\nu} \in \mathfrak{p}, \tag{1.5}$$

$$F_{\mu\nu} = 0, \quad D_\mu \tilde{B}^\mu = 0. \tag{1.6}$$

次に, 与えられた Lie algebra $\mathfrak{g}$ に対し, $\hat{\mathfrak{g}}$ を次のように構成する. $R: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(P)$ を $\mathfrak{g}$ の表現とし, $\{T_a\}$, $\{P_i\}$ をそれぞれ $\mathfrak{g}$, P の基底とする. このとき $\hat{\mathfrak{g}}$ の交換関係を次式で定義する.

$$\begin{aligned} [T_a, T_b] &= f^c_{ab} T_c, \\ [T_a, P_i] &= P_j R_{ji}(T_a), \\ [P_i, P_j] &= 0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

ここで, f^c_{ab} は $\mathfrak{g}$ の構造定数である. (LIC) が成り立つとき, 保存カレントは次のように構成することができる. まず, A_μ は flat であるから,

$$A_\mu = -\partial_\mu W W^{-1}, \tag{1.8}$$

$$W: M \to G \quad (\mathrm{Lie}G = \mathfrak{g})$$

と書ける. このとき,

$$J_\mu \equiv W^{-1} \tilde{B}_\mu W \tag{1.9}$$

は保存カレントである. なぜなら,

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu &= -W^{-1}\partial_\mu W W^{-1}\tilde{B}^\mu W + W^{-1}\partial_\mu \tilde{B}^\mu W + W^{-1}\tilde{B}^\mu \partial_\mu W \\ &= W^{-1} D_\mu \tilde{B}^\mu W \\ &= 0. \end{aligned}$$

一方，$\tilde{B}_\mu \in \mathfrak{p}$ より $J_\mu \in \mathfrak{p}$ であるから，

$$J_\mu = \sum_{i=1}^{\mathrm{dim}\mathfrak{p}} J_\mu^i P_i \tag{1.10}$$

と書くとき J_μ^i $(1 \leq i \leq \mathrm{dim}\mathfrak{p})$ は保存カレント になる．

この方法を使うと，ある model に対して，無限個の同値でない有限次元表現を用いて，無限個の保存カレントが構成できる．すなわち，$\mathfrak{g}$ が無限個の同値でない表現 P^j を持ち，対応する LIC を $(\mathrm{LIC})^j$ とする．そして，ある model の運動方程式と，任意の j に対する $(\mathrm{LIC})^j$ とが同値ならば，その model の無限個の保存カレントが得られることになる．

2 CP^1-model と CP^1-submodel

(1+2) 次元 CP^1-model は次の作用で与えられる．これは，Grassmann sigma model の特別な場合である；

$$\mathcal{A}(u) \equiv \int d^3x \frac{\partial^\mu \bar{u} \partial_\mu u}{(1+|u|^2)^2}, \tag{2.1}$$

ここで　$u : M^{1+2} \to \mathbf{C}$. その運動方程式は，

$$(1+|u|^2)\partial^\mu \partial_\mu u - 2\bar{u}\partial^\mu u \partial_\mu u = 0. \tag{2.2}$$

(2.1) は $SU(2)$ の作用で不変であるので，次の保存カレント（ネーターカレント）があることがわかる；

$$J_\mu^{Noet} = \frac{1}{(1+|u|^2)^2}(\partial_\mu u \bar{u} - u \partial_\mu \bar{u}), \tag{2.3}$$

$$j_\mu = \frac{1}{(1+|u|^2)^2}(\partial_\mu u + u^2 \partial_\mu \bar{u}), \tag{2.4}$$

$$\text{その複素共役} \quad \bar{j}_\mu. \tag{2.5}$$

[3] に従い，この model の LIC 表示を求める．まず，Cartan のうめ込み $i : CP^1 \to SU(2)$ を用いて，

$$W \equiv \frac{1}{\sqrt{1+|u|^2}} \begin{pmatrix} 1 & iu \\ i\bar{u} & 1 \end{pmatrix} \in i(CP^1) \qquad (u \in \mathbf{C}) \tag{2.6}$$

とする．次に，$\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{sl}(2,\mathrm{C})$ とし，その生成元 $\{T_+, T_-, T_3\}$ を次で与える；

$$[T_3, T_+] = T_+, \quad [T_3, T_-] = -T_-, \quad [T_+, T_-] = 2T_3. \tag{2.7}$$

P としては，$\mathfrak{g}$ のスピン j 表現をとる．このとき，$\hat{\mathfrak{g}}$ は次の交換関係で与えられる;

$$
\begin{aligned}
&[T_3, P_m^{(j)}] = mP_m^{(j)},\\
&[T_\pm, P_m^{(j)}] = \sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}P_{m\pm 1}^{(j)},\\
&[P_m^{(j)}, P_n^{(j)}] = 0
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

ここで，$m \in \{-j, -j+1, \cdots, j-1, j\}$ であり，$\{P_m^{(j)} | -j \le m \le j\}$ は P の基底とする．

このとき，以下のようにして，CP^1-model はスピン $j=1$ 表現を用いて構成される．すなわち，

$$
\begin{aligned}
A_\mu &\equiv -\partial_\mu W W^{-1}\\
&= \frac{-1}{1+|u|^2}\{i\partial_\mu u T_+ + i\partial_\mu \bar{u} T_- + (\partial_\mu u \bar{u} - u\partial_\mu \bar{u})T_3\},
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

$$
\tilde{B}_\mu^{(1)} \equiv \frac{1}{1+|u|^2}(\partial_\mu u P_1^{(1)} - \partial_\mu \bar{u} P_{-1}^{(1)})
\tag{2.10}
$$

と定義すれば，$F_{\mu\nu}=0$ であり，CP^1-model の運動方程式と $D_\mu \tilde{B}^{\mu(1)}=0$ が同値であることがわかる．つまり，CP^1-model の LIC 表示が得られたことになる．そこで，保存カレントを計算してみると，

$$
J_\mu^{(1)} \equiv W^{-1}\tilde{B}_\mu^{(1)} W = j_\mu P_1^{(1)} - \sqrt{2} i J_\mu^{Noet} P_0^{(1)} - \bar{j}_\mu P_{-1}^{(1)}
\tag{2.11}
$$

となり，確かにネーターカレントを再現している．しかし，これだけでは無限個の保存カレントを構成することはできない．

そこで次に，$\tilde{B}_\mu^{(1)}$ のかわりに

$$
\tilde{B}_\mu^{(j)} \equiv \frac{1}{1+|u|^2}(\partial_\mu u P_1^{(j)} - \partial_\mu \bar{u} P_{-1}^{(j)})
\tag{2.12}
$$

を考え，$D_\mu \tilde{B}^{\mu(j)} = 0$ $(j=1,2,\cdots,)$ を仮定してみる．すると，この条件は次の連立方程式と同値である;

$$
(1+|u|^2)\partial^\mu\partial_\mu u - 2\bar{u}\partial^\mu u \partial_\mu u = 0, \quad \partial^\mu u \partial_\mu u = 0,
$$

すなわち

$$
\partial^\mu \partial_\mu u = 0, \quad \partial^\mu u \partial_\mu u = 0.
\tag{2.13}
$$

定義 2.1 *(2.13) を運動方程式とする model を CP^1-submodel と呼ぶ.*

上の計算により，CP^1-submodel の LIC 表示が得られたことがわかる．それぞれの j に対し，保存カレント

$$J_\mu^{(j)} \equiv W^{-1}\tilde{B}_\mu^{(j)}W = \sum_{m=-j}^{j} J_\mu^{(j,m)}P_m^{(j)} \tag{2.14}$$

を求めることにより，無限個の保存カレントが具体的に計算できる．[3] では $j = 1,2,3$ のみ計算してあるが，我々は一般の j で具体的な形を求めた．

命題 2.2 **([4],[5])** *次のものは CP^1-submodel の保存カレントである.*
(a) $j \geq m \geq 1$ に対し,

$$\begin{aligned} J_\mu^{(j,m)} &= \sqrt{\frac{(j+m)!}{j(j+1)(j-m)!}}\frac{(-iu)^{m-1}}{(1+|u|^2)^{j+1}} \\ &\times \left(\sum_{n=0}^{j-m}\alpha_n^{(j,m)}|u|^{2n}\partial_\mu u + (-1)^{j-m}\sum_{n=0}^{j-m}\alpha_{j-m-n}^{(j,m)}|u|^{2n}u^2\partial_\mu\bar{u}\right), \end{aligned} \tag{2.15}$$

(b) $m = 0$ のとき,

$$J_\mu^{(j,0)} = -i\sqrt{j(j+1)}\frac{(\bar{u}\partial_\mu u - u\partial_\mu\bar{u})}{(1+|u|^2)^{j+1}}\sum_{n=0}^{j-1}\gamma_n^{(j,0)}|u|^{2n}, \tag{2.16}$$

(c) $j \geq m \geq 1$ に対し,

$$J_\mu^{(j,-m)} = (-1)^m J_\mu^{(j,m)\dagger}, \tag{2.17}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \alpha_n^{(j,m)} &= (-1)^n\frac{n!}{(m+n-1)!}\begin{pmatrix} j-m \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j+1 \\ n \end{pmatrix}, &(2.18)\\ \gamma_n^{(j,0)} &= (-1)^n\frac{1}{j}\begin{pmatrix} j \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j \\ n+1 \end{pmatrix}. &(2.19) \end{aligned}$$

なお，この (AFG)-method をそのまま一般化するのは困難であるが [6]，最近，我々の研究のアイデアを用いて，(AFG)-method を G/K-model に適用しようとする研究が，[7] によってなされている．

3 $(1+m)$ 次元 CP^1-submodel の保存カレントについて

ここでは，前節に求めた保存カレントやその他の保存カレントについて，その後の我々の研究からわかったことをいくつか述べる．まず，最初に次の定義をする．

定義 3.1

$$\partial^\mu \partial_\mu u = 0, \quad \partial^\mu u \partial_\mu u = 0 \qquad (\mu = 0, 1, \cdots, m)$$

$$u : M^{1+m} \to \mathbf{C}$$

を運動方程式とする *model* を $(1+m)$ 次元 CP^1-*submodel* と呼ぶ.

命題2.2において，$\mu = 0, 1, \cdots, m$ とすれば，$J_\mu^{(j,m)}$ は $(1+m)$ 次元 CP^1-submodel の保存カレントになることはすぐわかるが，実は次のことが成り立つ.

定理 3.2 $(1+m)$ 次元 CP^1-*submodel* の任意の保存カレントは次の形である．(*[2]* または，その 2 参照)

$$\left(\partial_\mu u \frac{\partial}{\partial u} - \partial_\mu \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \right) F \tag{3.1}$$

ここで，$F = F(u, \bar{u})$ は C^2 級関数.

これより，命題2.2の $J_\mu^{(j,m)}$ もこの形である．特に，$J_\mu^{(j,j)}$(highest weight part) は次のようになっている;

$$J_\mu^{(j,j)} = \left(\partial_\mu u \frac{\partial}{\partial u} - \partial_\mu \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \right) \left(\frac{u^j}{(1+|u|^2)^j} \right). \tag{3.2}$$

実は，$\frac{u}{1+|u|^2}$ は CP^1 を射影行列表示したときの成分のひとつであるので，このことは保存カレントが行列のテンソル積から作られることが示唆している．さらに，この表示は，保存カレントの線形関係を調べるのにも役に立つ．例えば，次の保存カレント

$$J^k_{(p,q);\mu} = \left(\partial_\mu u \frac{\partial}{\partial u} - \partial_\mu \bar{u} \frac{\partial}{\partial \bar{u}}\right) \left(\frac{u^p \bar{u}^q}{(1+|u|^2)^k}\right) \tag{3.3}$$

$$= \frac{k(\partial_\mu \bar{u} u - \bar{u}\partial_\mu u) u^p \bar{u}^q + (1+|u|^2)(\partial_\mu u^p \bar{u}^q - u^p \partial_\mu \bar{u}^q)}{(1+|u|^2)^{k+1}} \tag{3.4}$$

$$0 \le p \le k, 0 \le q \le k$$

に対しては,

$$\frac{u^k \bar{u}^l}{(1+|u|^2)^{m-p}} = \sum_{0\le q\le p} \frac{p!}{(p-q)!q!} \frac{u^{q+k}\bar{u}^{q+l}}{(1+|u|^2)^m} \tag{3.5}$$

から

$$J^{(m-p)}_{(k,l):\mu} = \sum_{0\le q\le p} \frac{p!}{(p-q)!q!} J^m_{(q+k,q+l);\mu} \quad (0 \le p \le m) \tag{3.6}$$

がわかる.

参考文献

[1] K. Fujii, Y. Homma and T. Suzuki: *Nonlinear Grassmann Sigma Models in Any Dimension and An Infinite Number of Conserved Currents,* to appear in Phys. Lett. B, hep-th/9806084.

[2] K. Fujii, Y. Homma and T. Suzuki: *Submodels of Nonlinear Grassmann Sigma Models in Any Dimension and Conserved Currents, Exact Solutions,* hep-th/9809149.

[3] O. Alvarez, L. A. Ferreira and J. S. Guillen: *A New Approach to Integrable Theories in Any Dimension,* Nucl.Phys. B529 (1998) 689,hep-th/9710147.

[4] K. Fujii and T. Suzuki: *Nonlinear Sigma Models in* (1 + 2)-*Dimensions and An Infinite Number of Conserved Currents,* to appear in Lett. Math. Phys., hep-th/9802105.

[5] K. Fujii and T. Suzuki: *Some Useful Formulas in Nonlinear Sigma Models in* (1 + 2)-*Dimensions,* hep-th/9804004.

[6] D. Gianzo, J. O. Madsen and J. S. Guillen: *Integrable Chiral Theories in 2+1 Dimensions,* hep-th/9805094.

[7] Luiz A. Ferreira and Erica E. Leite: *Integral theories in any dimension and homogenous spaces,* hep-th/9810067.